Ecole Santé Sciences
L'algèbre linéaire

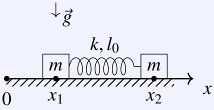
Hadrien Lorenzo, hadrien.lorenzo@u-bordeaux.fr

Université de Bordeaux

2018-2019

Exemple et mise en bouche

Description



On suppose deux mobiles de même masse m liés par un ressort (k, l_0), libres de se déplacer horizontalement.

Résolution

Référentiel supposé galiléen, deux points, on néglige les frottements. 2 bilans des forces, en projection sur $(0x)$. 2^{nde} loi de Newton :

$$\begin{cases} mx_1'' &= k(x_2 - x_1 - l_0), \\ mx_2'' &= -k(x_2 - x_1 - l_0) \end{cases}$$

Exemple et mise en bouche (2)

2 équations différentielles couplées

$$\begin{cases} x_1'' &= \omega_0^2/2(x_2 - x_1 - l_0), \\ x_2'' &= -\omega_0^2/2(x_2 - x_1 - l_0) \end{cases}$$

Le ressort **couple** les lois de mouvement des masses. $\omega_0^2 = 2k/m$

Solutions

On peut réécrire le problème en faisant le changement de variable $d = x_2 - x_1$ et $s = x_2 + x_1$. Alors

$$\begin{cases} d'' &= -\omega_0^2(d - l_0), \\ s'' &= 0 \end{cases}$$

Les équations sont **découplées.** $d(t)$: cos et sin solutions + solution constante l_0. $s(t)$: les fonctions linéaires.

Solution

Les solutions sont donc de la forme, $\forall t \in \mathbb{R}_+$:

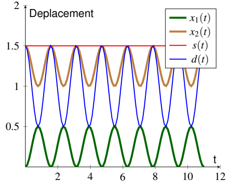
$$\begin{cases} d(t) & = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) + l_0 \\ s(t) & = c_3 t + c_4 \end{cases},$$

où (c_1, c_2, c_3, c_4) sont à estimer avec les conditions initiales : $d(0) = x_2(0) - x_1(0) = c_1 + l_0,\ d'(0) = x_2'(0) - x_1'(0) = c_1\omega_0,\ s(0) = x_2(0) + x_1(0) = c_4,\ s'(0) = x_2'(0) + x_1'(0) = c_3$

En revenant à (x_1, x_2)

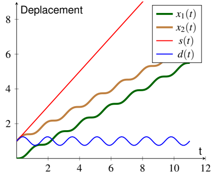
$$\begin{cases} x_1(t) = (s(t) - d(t))/2 = c_3 t + c_4 - c_1 \cos(\omega_0 t) - c_2 \sin(\omega_0 t) - l_0 \\ x_2(t) = (s(t) + d(t))/2 = c_3 t + c_4 + c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) + l_0 \end{cases}$$

Deux différents lancés



$$(x_1(0), x_2(0)) = (0, 1.5l_0) \text{ et } (x_1'(0), x_2'(0)) = (0, 0)$$

- $s(t) = cste$.
- $d(t) \neq cste$.



$$(x_1(0), x_2(0)) = (0, l_0) \text{ et } (x_1'(0), x_2'(0)) = (0, v_0)$$

- $s(t) \neq cste$.
- $d(t)$ faibles oscillations.

Imaginer

Un mouvement relatif faible et un grand mouvement d'ensemble. Quelles conditions initiales ?

Le plus important ?

La résolution de ce problème passe par le **découplage** du système d'équations différentielles

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1'' = f_1(x_1, x_2) \\ x_2'' = f_2(x_1, x_2) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} s'' = g_s(s) \\ d'' = g_d(d) \end{array} \right. ,$$

indépendance des deux équations du système de droite.
L'équivalence des deux descriptions est due au **changement de description/repère**, $d = x_2 - x_1$, $s = x_2 + x_1$.
La linéarité des équations rend le découplage "facile".

Conclusion de l'exemple et ouverture

***Le changement de repère** permet une réécriture du problème **multi-linéaire** où les 2 variables du système ne sont plus **couplées**.*

Questions :

- Que se passe-t-il s'il y a plus de masses m, est-ce toujours possible ?

  Oui

- Allons-nous apprendre la méthode ?

  On va au moins l'entrevoir oui

- Est-ce utile pour autre chose ?

  Oui, les processus biologiques par exemple, migrations de cellules, les dégradations de produits radioactifs etc...

Conclusion de l'exemple et ouverture

***Le changement de repère** permet une réécriture du problème **multi-linéaire** où les 2 variables du système ne sont plus **couplées**.*

Questions :

- Que se passe-t-il s'il y a plus de masses m, est-ce toujours possible ?

  Oui
- Allons-nous apprendre la méthode ?

  On va au moins l'entrevoir oui
- Est-ce utile pour autre chose ?

  Oui, les processus biologiques par exemple, migrations de cellules, les dégradations de produits radioactifs etc...

Conclusion de l'exemple et ouverture

***Le changement de repère** permet une réécriture du problème **multi-linéaire** où les 2 variables du système ne sont plus **couplées**.*

Questions :

- Que se passe-t-il s'il y a plus de masses m, est-ce toujours possible ?

  Oui

- Allons-nous apprendre la méthode ?

  On va au moins l'entrevoir oui

- Est-ce utile pour autre chose ?

  Oui, les processus biologiques par exemple, migrations de cellules, les dégradations de produits radioactifs etc...

Conclusion de l'exemple et ouverture

***Le changement de repère** permet une réécriture du problème **multi-linéaire** où les 2 variables du système ne sont plus **couplées**.*

Questions :

- Que se passe-t-il s'il y a plus de masses m, est-ce toujours possible ?

  Oui

- Allons-nous apprendre la méthode ?

  On va au moins l'entrevoir oui

- Est-ce utile pour autre chose ?

  Oui, les processus biologiques par exemple, migrations de cellules, les dégradations de produits radioactifs etc...

Conclusion de l'exemple et ouverture

***Le changement de repère** permet une réécriture du problème **multi-linéaire** où les 2 variables du système ne sont plus **couplées**.*

Questions :

- Que se passe-t-il s'il y a plus de masses m, est-ce toujours possible ?

  Oui

- Allons-nous apprendre la méthode ?

  On va au moins l'entrevoir oui

- Est-ce utile pour autre chose ?

  Oui, les processus biologiques par exemple, migrations de cellules, les dégradations de produits radioactifs concurrents, etc...

Conclusion de l'exemple et ouverture

***Le changement de repère** permet une réécriture du problème **multi-linéaire** où les 2 variables du système ne sont plus **couplées**.*

Questions :

- Que se passe-t-il s'il y a plus de masses m, est-ce toujours possible ?

  Oui
- Allons-nous apprendre la méthode ?

  On va au moins l'entrevoir oui
- Est-ce utile pour autre chose ?

  Oui, les processus biologiques par exemple, migrations de cellules, les dégradations de produits radioactifs concurrents, etc...

Les matrices

$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^{*2}$, une matrice est un tableau formé de n lignes et p colonnes.

On appelle $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes.

On privilégie les majuscules pour symboliser les matrices et les minuscules pour symboliser leurs éléments constitutifs. On représente une matrice par deux grandes "()" ou "[]" ainsi, $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on note

$$A = \left(a_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Les formats de matrices

- Si $p = n$ on les appelle **matrices carrées**,
- Si $p \neq n$ on les appelle **matrices rectangulaires**,
- Si $p = 1$ on les appelle **matrices colonnes**, ou encore **vecteurs**,
- Si $n = 1$ on les appelle **matrices lignes**,
- Si $p = n = 1$ on est en présence de l'ensemble des réelles $\mathbb{R}$.

Quelques matrices particulières

- La **matrice nulle** se note, dans ce cours, $\mathbf{0}$,
- On appelle **matrice diagonale** une **matrice carrée** dont tous les éléments non diagonaux sont nuls. Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9.109 * 10^{-31} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\pi} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}),$$

- La **matrice diagonale** de$\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux sont égaux à 1 est **l'identité**, notée $\mathbb{I}_n$,
- Une **matrice triangulaire supérieure**, resp. **inférieure**, est une matrice dont les éléments sous, resp. sur, la diagonale sont nuls. Si la diagonale est nulle on parle de **matrice triangulaire supérieure/inférieure stricte.**

Opérations de base, n et p des entiers positifs non nuls

$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

- **Multiplication par un scalaire**,
  $\lambda A = \lambda \left(a_{(i,j)}\right)_{(i,j)} = \left(\lambda a_{(i,j)}\right)_{(i,j)}$,
- **Addition de 2 matrices**
  $A + B = \left(a_{(i,j)}\right)_{(i,j)} + \left(b_{(i,j)}\right)_{(i,j)} = \left(a_{(i,j)} + b_{(i,j)}\right)_{(i,j)}$,
- **Transposée** $A^T = A' = \left(a_{(i,j)}\right)^T_{(i,j)} = \left(a_{(j,i)}\right)_{(i,j)} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2.3 & 5 \\ 0.8 & 9.109 * 10^{-31} & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 \\ 2.3 & 9.109 * 10^{-31} \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}),$$

Autres opérations à connaître

$\forall A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$

- **La trace**, notée $Tr(A)$, telle que

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{(i,i)},$$

c'est la somme des éléments diagonaux. Ex

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Tr(A) = 1$$

Le produit matriciel

$\forall (A, B, C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$, on note

$$AB = \Big(\sum_{k=1}^{p} a_{(i,k)} * b_{(k,j)}\Big)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!]} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R}),$$

par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ AB = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 16 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Associativité** $(AB)C = A(BC)$
- **Distributivité** $A(B + C) = AB + AC$
- $A\mathbb{I}_p = \mathbb{I}_n A = A$
- $A\mathbf{0} = \mathbf{0}A = \mathbf{0}$

Commutativité

Définition $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})^2$, on dit que A et B commutent si et seulement si

$$AB = BA$$

Remarques

- Ce n'est pas le cas en général.
- $AB = 0$ n'implique **ni** $B = \mathbf{0}$ **ni** $A = \mathbf{0}$: Absence **d'intégrité.** Ex : $A = (1 \quad 1)$ et $B = (-1 \quad 1)^T$.
- $\forall C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ tel que $AB = AC$ n'implique PAS $B = C$. Ex : $A = (1 \quad 0)$, $B = (1 \quad 1 * 10^3)^T$ et $C = (1 \quad -\sqrt{\pi})^T$.

Règles de produit

$\forall(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$

- **Transposée du produit** : $(AB)' = B'A'$
- Si $n = p = q$ et si $AB = BA = \mathbb{I}_n$, alors A et B sont dites **inverses** l'une de l'autre. On note alors $A = B^{-1}$ et $B = A^{-1}$

Attention : A^{-1} n'existe pas forcément.

Linéaire indépendance des colonnes/lignes d'une matrice

Définition

On dit que les colonnes de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *sont linéairement indépendantes si et seulement si* $\forall \boldsymbol{\lambda} = \left(\lambda_j\right)^T_{j=1..p} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$$A\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \iff \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A\boldsymbol{\lambda} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A\boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 * 1 + \lambda_2 * 0 + \lambda_3 * 1 \\ \lambda_1 * 0 + \lambda_2 * 1 + \lambda_3 * (-1) \\ \lambda_1 * (-1) + \lambda_2 * 0 + \lambda_3 * 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 \\ \lambda_2 - \lambda_3 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_3 \end{pmatrix}$$

Linéaire indépendance des colonnes/lignes d'une matrice (2)

Et donc

$$A\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 \\ \lambda_2 - \lambda_3 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases},$$

Nous avons réécrit le problème **matriciel** en un **système de 3 problèmes linéaires.** Il y a **équivalence** entre les 2 approches. On peut remarquer qu'il y a un fort **couplage** entre les équations, au travers des paramètres λ_j.

Objectif : Défaire ce couplage !

Méthode 1 : Le pivot de Gauss

Principe *Trouver des **combinaisons linéaires** d'équations pour avoir des équations indépendantes. A chaque fois une équation e_j est désignée **pivot**.*

Exemple précédent : $\begin{cases} e_1 & : \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ e_2 & : \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ e_3 & : -\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$,

$pivot :\ e_1, \quad e_3 \leftarrow (e_3 + e_1)/3$ alors : $\begin{cases} e_1 & : \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ e_2 & : \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ e_3 & : \lambda_3 = 0 \end{cases}$,

$pivot :\ e_3, \quad \begin{matrix} e_2 & \leftarrow e_2 + e_3 \\ e_1 & \leftarrow e_1 - e_3 \end{matrix}$ et donc : $\begin{cases} e_1 & : \lambda_1 = 0 \\ e_2 & : \lambda_2 = 0 \\ e_3 & : \lambda_3 = 0 \end{cases}$,

Méthode 1 : Le pivot de Gauss

Principe *Trouver des **combinaisons linéaires** d'équations pour avoir des équations indépendantes. A chaque fois une équation e_j est désignée **pivot**.*

Exemple précédent : $\begin{cases} e_1 & : \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ e_2 & : \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ e_3 & : -\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$,

$$pivot: \ e_1, \qquad e_3 \leftarrow (e_3 + e_1)/3 \ \text{ alors : } \begin{cases} e_1 & : \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ e_2 & : \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ e_3 & : \lambda_3 = 0 \end{cases},$$

$$pivot: \ e_3, \quad \begin{matrix} e_2 & \leftarrow e_2 + e_3 \\ e_1 & \leftarrow e_1 - e_3 \end{matrix} \ \text{ et donc : } \begin{cases} e_1 & : \lambda_1 = 0 \\ e_2 & : \lambda_2 = 0 \\ e_3 & : \lambda_3 = 0 \end{cases},$$

Méthode 1 : Le pivot de Gauss

Principe *Trouver des **combinaisons linéaires** d'équations pour avoir des équations indépendantes. A chaque fois une équation e_j est désignée **pivot**.*

Exemple précédent : $\begin{cases} e_1 & : \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ e_2 & : \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ e_3 & : -\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$,

$pivot : \; e_1, \quad e_3 \leftarrow (e_3 + e_1)/3$ alors : $\begin{cases} e_1 & : \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ e_2 & : \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ e_3 & : \lambda_3 = 0 \end{cases}$,

$pivot : \; e_3, \quad \begin{matrix} e_2 & \leftarrow e_2 + e_3 \\ e_1 & \leftarrow e_1 - e_3 \end{matrix}$ et donc : $\begin{cases} e_1 & : \lambda_1 = 0 \\ e_2 & : \lambda_2 = 0 \\ e_3 & : \lambda_3 = 0 \end{cases}$,

Méthode 1 : Le pivot de Gauss (suite)

On a alors comme solution unique au problème $A\lambda = \mathbf{0}$, $\lambda = \mathbf{0}$. Les colonnes de A sont donc indépendantes. On dit :

Les colonnes de A forment une famille ***indépendante/libre*** ou *sont libres. Elles sont dites liées/dépendantes dans le cas inverse*.

Concrètement : Chaque ligne de A apporte une information supplémentaire, absente des autres lignes.
Exercices : Dire si les colonnes des matrices suivantes sont libres ou liées

- La matrice identité,
- La matrice nulle,
- Une matrice diagonale quelconque. Poser des conditions sur les éléments diagonaux le cas échéant.

S'exercer

Dire si les matrices suivantes ont des colonnes/lignes libres ou liées

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 11 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Rang d'une matrice

Le rang d'une matrice, $rg : \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{N}$ est le nombre maximum de colonnes, ou de matrices, indépendantes

Propriétés :

- Le rang d'une matrice est égal au rang de ses lignes et au rang de ses colonnes.
- Le rang n'est pas modifié par combinaison linéaire, non nulle, d'une ligne/col. avec d'autres lignes/col. de cette même matrice. *C'est pour ça que le pivot de Gauss fonctionne*.
- Le rang n'est pas modifié par permutation de ligne/col..
- Le rang d'une matrice triangulaire, ou diagonale, est égal au nombre de ses éléments diagonaux non nuls.

S'exercer

Donner le rang de ces matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 11 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Le déterminant, en très général

C'est une fonction que l'on applique aux matrices carrés et qui renvoie un réel :

$$det : \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R},$$

elle rend beaucoup de services et se calcule ainsi, en 2 et 3 dimensions,

Déterminant d'une matrice de dimension 2 [modifier | modifier le code]

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Déterminant d'une matrice de dimension 3 [modifier | modifier le code]

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ \square & e & f \\ \square & h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ d & \square & f \\ g & \square & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ d & e & \square \\ g & h & \square \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$= aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$$

Le déterminant, en très général

C'est une fonction que l'on applique aux matrices carrés et qui renvoie un réel :

$$det : \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R},$$

elle rend beaucoup de services et se calcule ainsi, en 2 et 3 dimensions,

Déterminant d'une matrice de dimension 2 [modifier | modifier le code]

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Déterminant d'une matrice de dimension 3 [modifier | modifier le code]

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ \square & e & f \\ \square & h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ d & \square & f \\ g & \square & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ d & e & \square \\ g & h & \square \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$= aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$$

Méthode, encore

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \overbrace{+1 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}}^{\text{Ceci ne doit pas figurer sur vos copies, c'est juste pour vous expliquer.}}$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

Petites propriétés du déterminant

Parmi la ribambelle de propriétés utiles, $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})^2$

- $det(A) \neq 0 \iff rg(a) = n$,
- Donc, $det(\mathbf{0}) = 0$,
- $det(A') = det(A)$,
- $det(AB) = det(A)det(B)$,
- $det(\mathbb{I}_n) = 1$,

Calculer des déterminants

On note $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C = AB$

1. Calculer $det(A)$,
2. Calculer $det(B)$,
3. Calculer C,
4. Comment calculer $det(C)$ facilement ?

Matrice inversible

Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est dite inversible **ssi**

$$\exists A^{-1} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) | AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{I}_n,$$

Démontrer $det(A^{-1}) = \dfrac{1}{det(A)}$?

Théorème :

Une matrice est inversible ssi son déterminant est non nul ssi ses colonnes forment une famille libre.

Il existe une large littérature sur l'inversion des matrice, ce qui dépasse le cadre de ce cours.

Matrice diagonalisable

Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est dite diagonalisable **ssi**

$\exists (P, D) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})^2$ avec P inversible et D diagonale $|A = PDP^{-1}$,

dans ce cas, $\forall i \in 1..n$, chaque i^{th}-colonne de P est un **vecteur propre** de A associée à la i^{th}-**valeur propre** de A présente en position i sur la diagonale de D. En notant P_i la i^{th}-colonne de P et d_i le i^{th} élément diagonale de D, on a

$$AP_i = d_i P_i,$$

On dit que A et D sont **semblables.**

Intérêt ?

“A quoi servent les matrices inverses/déterminants et tutti quanti ?” me demanderez-vous

A résoudre les systèmes d’équations linéaires.

Exemple concret

On désire produit un aliment avec 3 éléments : A, B et C. Sachant que chacun des aliments apporte une proportion massique en sucres, protéines et féculents renseignée dans le tableau suivant

	sucres	protéines	féculents
A	0.2	0.35	0.3
B	0.5	0.1	0.2
C	0	0.1	0.7

et que l'on désire avoir au final 30% de sucre, 20% de protéines et 50% de féculents.

Quelle est alors la proportion de chaque ingrédient à mettre dans la recette pour obtenir ces différentes teneurs ?

Écriture du problème

On écrit a, b et c les quantités en chaque aliment solution du problème, alors :

$$\begin{cases} sucres & : 0.2a + 0.5b + 0c & = 0.3 \\ prots. & : 0.35a + 0.1b + 0.1c & = 0.2 \\ fecus. & : 0.3a + 0.2b + 0.7c & = 0.5 \end{cases}$$

En notant $x = (a,b,c)'$, $M = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0 \\ 0.35 & 0.1 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$ et $B = (0.3, 0.2, 0.5)'$, alors le système précédent se réécrit de façon équivalente

$$Mx = B$$

Forme matricielle du problème et analyse (1)

Ainsi, M est une matrice carrée. Si elle est inversible, on peut écrire directement, en notant

$$M^{-1}$$

son inverse :

$$x = M^{-1}B.$$

Or, grâce à Python ou consorts on a $det(M) = -0.0975 \neq 0$ et donc M est inversible.
Grâce à Python ou consorts on trouve

$$M^{-1} \approx \begin{pmatrix} -0.51 & 3.6 & -0.51 \\ 2.2 & -1.4 & 0.21 \\ -0.4 & -1.1 & 1.6 \end{pmatrix},$$ and $x \approx (25\%, 39\%, 36\%)'$

Forme matricielle du problème et analyse (1)

On peut aussi faire la méthode du pivot de Gauss pour trouver des solutions acceptables, mais l'ordinateur permet de faire des calculs rapidement donc tout va bien.

Attention

Cette méthode est possible car :

- M est **inversible**, il faut donc au moins que M soit **carré** mais ce n'est pas suffisant.
- B est non nulle.

Retour à la mise en bouche

Soit une matrice dépendante du temps : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ X(t)$. Alors on définit sa dérivée temporelle $\dot{X}(t)$ comme étant la matrice des dérivées des éléments de $X(t)$. En somme :
$\dot{X}(t) = \left(\dot{x}_{(i,j)}(t)\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$.
Pour rappel, nous eûmes :

$$\begin{cases} x_1'' & = \omega_0^2/2(x_2 - x_1 - l_0) \\ x_2'' & = -\omega_0^2/2(x_2 - x_1 - l_0) \end{cases} = \begin{cases} x_1'' & = -\omega_0^2/2x_1 + \omega_0^2/2x_2 - \omega_0^2/2l_0 \\ x_2'' & = \omega_0^2/2x_1 - \omega_0^2/2x_2 + \omega_0^2/2l_0 \end{cases}$$

en notant $X = (x_1, x_2)'$, $A = \begin{pmatrix} -\omega_0^2/2 & \omega_0^2/2 \\ \omega_0^2/2 & -\omega_0^2/2 \end{pmatrix}$ et
$b_0 = \omega_0^2 l_0/2(-1, 1)'$, on a le problème suivant

$$\ddot{X} = AX + b_0$$

Mise en bouche –> Cas général

Rappel

On a vu que la résolution du problème précédent passait par le **découplage** des variables.

Supposons maintenant que A soit **diagonalisable**, dans ce cas $\exists (P, D) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})^2$ avec P inversible et D diagonale $|A = PDP^{-1}$, et en réécrivant le problème diférentiel précédent, on trouve

$$\ddot{X} = PDP^{-1}X + b_0 \quad \iff \quad P^{-1}\ddot{X} = DP^{-1}X + P^{-1}b_0,$$

en multipliant à gauche par P^{-1}. Si on pose $Y = P^{-1}X$, alors

$$\ddot{Y} = DY + B.$$

Problèmes indépendants

Ainsi on peut écrire, $(d_1, .., d_n)'$ les éléments diagonaux de D et $Y = (y_1, .., y_n)'$,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \ddot{y_1} & = d_1 y_1 + (P^{-1} b_0)_1 \\ \ddot{y_2} & = d_2 y_2 + (P^{-1} b_0)_2 \\ \dots & \dots \\ \ddot{y_n} & = d_n y_n + (P^{-1} b_0)_n \end{array} \right.$$

Or pour toutes ces équations différentielles nous connaissons des solutions, les exponentielles avec pour paramètres $(d_i)_{i=1..n}$. Et donc $\forall i \in 1..n$

$$y_i(t) = \left\{ \begin{array}{ll} C_i \cos(d_i t) + E_i \sin(d_i t) - (P^{-1} b_0)_i / d_i & \text{si } d_i \neq 0 \\ C_i + E_i t & \text{sinon} \end{array} \right. , C_i, E_i \text{ cste}$$

Retour au problème initial

Maintenant que les y_i ont été trouvés, il suffit d'opérer l'opération inverse pour récupérer les x_i, soit

$$X(t) = PY(t),$$

pour ensuite trouver les C_i en fonction des conditions initiales.

Récapitulatifs

Résolution d'un système d'EDO linéaires :

- Écrire le problème sous forme **matricielle** $\dot{X}$ ou $\ddot{X} \ = AX + b_0$,
- Trouver les **vecteurs propres**, via P, associés aux **valeurs propres** de A, via D,
- Écrire les solutions sous forme **découplée**,
- Revenir dans la description **couplée** grâce à l'opération $X(t) = PY(t)$ et estimer les constantes d'intégration.

Résolution du problème $Mx = B$: Si M est carrée et inversible $B \neq \mathbf{0}$, alors

$$x = M^{-1}B$$