Ecole Santé Sciences
Des rappels et du nouveau

Hadrien Lorenzo, hadrien.lorenzo@u-bordeaux.fr

Université de Bordeaux

2018-2019

Modélisation et fonctions

Une fonction est un objet, noté f, qui permet d'associer à une valeur, notée x, prise dans un ensemble de valeurs, noté X, une valeur, notée y, prise dans un ensemble de valeurs, noté Y, de **façon unique**. On écrit alors

$$f: \begin{array}{ll} X & \mapsto Y \\ x & \to y = f(x) \end{array}.$$

Exemple : Un morceau de plomb, indicé par i, dont on connaît le volume (V_i) et la masse volumique (ρ_i). On note alors $x_i = (V_i, \rho_i) \in \mathbb{R}^2 = X$. Le **modèle** donnant la masse (m) d'un corps est le produit du volume par la masse volumique.
$f : (V, \rho) \to f(V, \rho) = V\rho = m = y \in \mathbb{R} = Y$ et alors

$$m_i = f(V_i, \rho_i) = V_i \rho_i,$$

mais dans le vrai monde il y a des erreurs et $m_{i,observation} \neq m_i$

Incertitudes et modèles probabilistes

D'où vient cette **non unicité** ?

- Bruit d'observation : la balance a une erreur ;
- Mauvais modèle : La masse volumique est en fait variable : oxydation dans le temps.

Solution ?

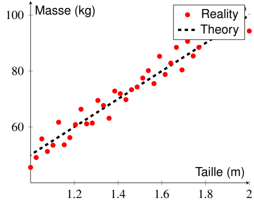
- Jeter à la poubelle les théories fonctionnelles ?... Non !
- Les adapter ?... Oui !

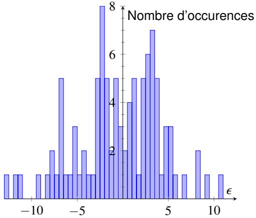
Modélisation des incertitudes nécessaire.

Quid des **phénomènes incertains** ? lancés de pièces, de dés, etc...
Modélisation fonctionnelle... absurde
Solution : Modéliser l'incertain qui minimise une erreur statistique sur les données.

Exemple de phénomène avec erreurs d'observations et/ou de modèles

La masse de 100 individus en fonction de leur taille.





- Modèle linéaire sans erreur $\mathbf{m} = a.\mathbf{t}$, a grâce aux données. Modèle ?
- Modélisation des erreurs (observation et modèle) via $\boldsymbol{\epsilon}$, $\mathbf{m} = a.\mathbf{t} + \boldsymbol{\epsilon}$.
  On minimise l'erreur totale :
  $$\min_a \sum_{i=1}^{100} \epsilon_i^2 = \min_a \sum_{i=1}^{100} (m_i - a.t_i)^2, \text{ où}$$
  $$\hat{a} = \sum_{i=1}^{100} m_i.t_i / \sum_{i=1}^{100} t_i^2 \approx 49.65 \text{ avec } a_{theorie} = 50$$

Exemple de phénomène incertain : la production d'ARN par un groupe de cellules

Soit un échantillon sanguin i. On récolte l'ARN dans ses cellules. On suppose avoir une machine qui compte tous les brins d'ARN : le **bruit d'observation est nul.** On peut classifier les brins par égalité des paires de bases, le représentant s'appelle **gène**. Chaque gène g a une **probabilité** d'être présent un certain nombre de fois, noté $K_{i,g}$, tel que

$$K_{i,g} \sim NB(\mu_{i,g}, \sigma^2_{i,g}), \quad \mu_{i,g} \text{ et } \sigma^2_{i,g} \text{ à fitter sur les données.}$$

Commentaires : Modèle stochastique, NB pour binomiale négative. On utilise ce modèle pour faire des tests de sur/sous-expression de gènes par individus ou groupes d'individus.

Objectifs du cours

- Revoir l'analyse fonctionnelle, les fonctions de base et les équations différentielles.
  $\Longrightarrow$ Dérivation=. Fonctions exponentielle, logarithme et trigonométriques.
- Découvrir le monde des Équations aux Différentielles Ordinaires (EDO ou ODE en inglish).
- Découvrir le calcul matriciel et prendre en main les opérations basiques associées : C'est l'**algèbre linéaire** !
  $\Longrightarrow$ Bien pour analyser les phénomènes avec plusieurs grandeurs.
- Revoir probas/stats : nécessaire pour décrire les phénomènes complexes
- Arriver à utiliser Python
- Apprécier tout ça pour bien commencer l'année !

Plan du cours

1. Analyse fonctionnelle et modélisation
   4 octobre après-midi
2. Introduction au calcul matriciel
   11 octobre après-midi
3. Probabilités et statistiques
   18 octobre après-midi
4. TD qui rigole pas
   25 octobre après-midi

Les fonctions et leurs atouts

$$
\begin{array}{llll} f: & X & \mapsto & Y \\ & x & \rightarrow & y = f(x) \end{array} .
$$

Dans cette partie, $X \subset \mathbb{R}$ et $Y \subset \mathbb{R}$. Les fonctions f sont les fonctions d'une variable réelle à valeur réelle.
On s'intéresse aux tendances, croissance/ décroissance/ constance, de la fonction étudiée et aux notions de dérivation et d'intégration.

Taux d'accroissement et sens de variation

Taux d'accroissement

Soit f, $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 < x_2$ le *taux d'accroissement* est noté

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Le taux d'accroissement renseigne sur le sens de variation de la fonction. Si ce taux est :

- Strictement positif, la fonction est croissante strictement
- Positif ou nul, la fonction est croissante ou constante

Et inversement pour un taux d'accroissement négatif.
Problème le taux d'accroissement est une fonction de deux variables... trop compliqué ! On définit alors la dérivation

Dérivée première

Dérivation

Soit f, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ la *dérivée* de f en x_0 est notée

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x_0 + \epsilon) - f(x_0)}{\epsilon},$$

à supposer que l'on puisse l'écrire, dans ce cas on dit que "f *dérivable en* x_0".

La dérivation est la limite du taux d'accroissement lorsque x_2 tend vers x_1. $f(x_0)$ est croissante, resp décroissante, resp constante en x_0 si $f'(x_0)$ est positive, resp négative, resp nulle.

Dérivation d'ordre "n"

Dérivat

Soit f, $\forall (x_0, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ la *dérivée d'ordre "n"* de f en x_0 est notée

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n f}{dx^n}(x_0) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \epsilon) - f^{(n-1)}(x_0)}{\epsilon},$$

à supposer que l'on puisse l'écrire, dans ce cas on dit que "f est *dérivable n-fois en* x_0" ou bien que "$f^{(n-1)}$ *dérivable en* x_0"

En physique f' est la **vitesse**, $f'' = f^{(2)}$ est l'**accélération**. Les dérivées suivantes n'ont pas de petits noms.

Règles de dérivation générales

$\forall(f, g)$ deux fonctions dérivables, $a \in \mathbb{R}$ une constante et $k \in \mathbb{N}^*$, alors

- $(f+g)' = f' + g'$
- $(af)' = af'$
- $(f^k)' = kf^{k-1}f'$
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $(1/f)' = -f'/f^2$, si $f \neq 0$
- $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$, si $g \neq 0$
- $(f \circ g)' = (f' \circ g)f'$, où $\circ$ est l'opérateur *composition*

L'intégration

Le symbole de l'intégrale est $\int_a^b$ où a et b sont des bornes à définir, ou pas. $\int$ définit l'intégrale générale d'une fonction.

Cas particuliers, où a et b sont des *constantes d'intégration* et f est une fonction de la variable réelle t :

- $\int 0 = a$,
- $\int t = t^2/2 + a$,
- $\int f' = f + a$,
- $\int \int f'' = f + at + b$.

C'est donc l'opération inverse de la dérivation.

La fonction linéaire

La fonction la plus courante : la fonction linéaire f telle que

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 | \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + b,$$

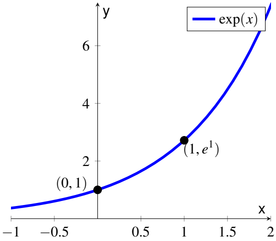
a, nommé pente, et b, nommé ordonnée à l'origine, sont les *paramètres* de la fonction. Alors f est dérivable une infinité de fois et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = a, \quad \forall k \in \mathbb{N}^* - \{1\}, \quad f^{(k)}(x) = 0$$

Alors f est :

- Croissante/ Décroissante/ Constante si a est positif/ négatif/ nul

La fonction exponentielle



$$\exp : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \mapsto \mathbb{R}_+^* \\ x & \rightarrow y = \exp(x) = e^x \end{array}$$

- $\exp$ est définie sur $\mathbb{R}$ entier mais prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
- $\exp$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

- $\exp' = \exp$: la dérivée de la fonction exponentielle est la fonction exponentielle.
- $\exp$ est positive strictement sur $\mathbb{R}$ donc $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

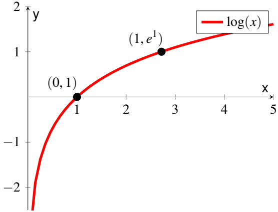
$\exp$ vérifie la relation $f' = f$.

Propriétés de la fonction exponentielle

$\forall(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $\forall(a,n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}^*$, alors

- $\exp(0) = 1$ et $\exp(e) \approx 2.718$
- $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$
- $\exp(x)^a = \exp(ax)$
- $\exp(-x) = 1/\exp(x)$
- $\exp(x-y) = \exp(x)/\exp(y)$
- $\sqrt[n]{\exp(x)} = \exp(x/n)$

La fonction logarithme



$$\begin{array}{llll} \log : & \mathbb{R}_+^* & \mapsto \mathbb{R} \\ & x & \rightarrow y = \log(x) \end{array}$$

- $\log$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ mais prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ entier
- $\log$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

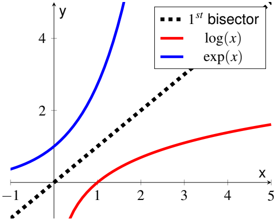
- $\log' : x \rightarrow 1/x$: la dérivée de la fonction logarithme est la fonction inverse.
- $\log'$ est positive strictement sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\log$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Propriétés de la fonction logarithme

$\forall(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et $\forall(a, n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}^*$, alors

- $\log(1) = 0$ et $\log(e) = 1$
- $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$
- $\log(x^a) = a\log(x)$
- $\log(1/x) = -\log(x)$, si $x \neq 0$
- $\log(x/y) = \log(x) - \log(y)$
- $\log(\sqrt[n]{x}) = \log(x)/n$

Exponentielle et logarithme

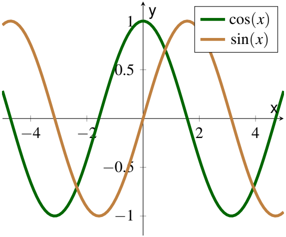


exp et log sont des fonctions inverse l'une de l'autre, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$:

$$\exp \circ \log(x) = x, \log \circ \exp(y) = y,$$

on écrit aussi $\log \circ \exp = \mathbb{I}$ et $\exp \circ \log = \mathbb{I}$, $\mathbb{I}$ pour *identité*.
$\rightarrow$ exp et log sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Les fonctions trigonométriques



$$\begin{aligned} \cos: \quad & \mathbb{R} && \mapsto [-1,1] \\ & x && \rightarrow y=\cos(x) \\ \sin: \quad & \mathbb{R} && \mapsto [-1,1] \\ & x && \rightarrow y=\sin(x) \end{aligned}$$

- $\cos$ et $\sin$ sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.
- $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$

Ces deux fonctions sont dites 2π-périodiques : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$, $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$.
Pour tout point du cercle unité, $\exists! \theta \in [0, 2\pi[|$ les coordonnées de ce point soient $(\cos(\theta), \sin(\theta))$.

$\cos$ et $\sin$ vérifient la relation $f'' = -f$.

Quelques formules de trigonométrie

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall (n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}^*$, alors

- $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$,
  $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

Pour le reste, voir Wikipédia

Comment analyser une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

On entend par là : trouver les points stationnaires (potentiellement des minima ou des maxima) et les caractériser.

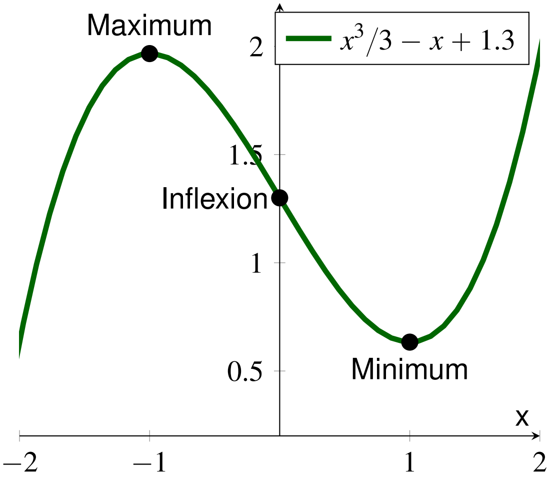
1) Chercher l'ensemble des points stationnaires de f, noté X_0 :

$$X_0 = \{ x_0 \in X \mid f'(x_0) = 0 \}$$

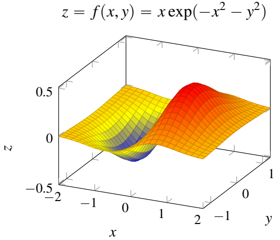
2) $\forall x_0 \in X_0$, étudier $f''(x_0)$ et dans le voisinage immédiat de x_0 :

Voisinage de x_0 / $f''(x_0)$	Même signe de f'' à gauche et à droite		Signes $\neq$ de f'' à gauche et à droite
> 0	Point minimum		Impossible
< 0	Point maximum		Impossible
$= 0$	Signe > 0 Pt min.	Signe < 0 Pt. max.	Point d'inflexion

Exemples de points stationnaires



Les fonctions de plusieurs variables à valeur réelle



$\exists p \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ tel que

$$f: \begin{array}{ll} X \subset \mathbb{R}^p & \mapsto Y \subset \mathbb{R} \\ x = (x_1, \cdots, x_p) & \to y = f(x) \end{array}.$$

Dérivabilité partielle : dérive selon chaque variable, $\forall i \in [\![1, p]\!]$, si f est assez régulière : $\frac{\partial .}{\partial x_i}$.

On définit les *dérivées partielles* d'ordre supérieures sur le même schéma.

Exemple avec $f : (x, y) \to xe^{-x^2-y^2}$:$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (\frac{1}{x} - 2x)f(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2xf(x, y)$.

Les fonctions, aller plus loin ?

On va attendre le deuxième cours et les matrices !

Les Equations Différentielles Ordinaires (EDO)

Définition : EDO d'ordre k

Soit F une fonction réelle assez régulière, on appelle équation différentielle résolue par f

$$f^{(k)}(t) = F(f^{(k-1)}, \cdots, f, t), \tag{1}$$

qualifiée d'*autonome* si ne dépend pas directement de t.

Vous connaissez sûrement :

- $f' = f$, avec la fonction exponentielle et $F = \mathbb{I}$
- $f'' = -f$, avec les fonctions trigonométriques et $F = -\mathbb{I}$
- En connaissez-vous d'autres ?

Le problème de Cauchy

Définition

Soit une équation différentielle du type (1), on appelle problème de Cauchy

$$\begin{cases} f^{(k)}(t) & = F(f^{(k-1)}, \cdots, f, t) \\ \left(f(t_0), \cdots, f^{(k-1)}(t_0)\right) & = (f_0, \cdots, f_0^{(k-1)}) \end{cases} \tag{2}$$

avec la seconde ligne correspondant aux conditions initiales, les conditions de Cauchy.

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit un problème tel que (2), avec F assez régulière, alors (2) admet une solution unique $\forall t \in \mathcal{I}$ bien choisi.

Exemple de la chute d'une pomme

Enoncé : *Soit une pomme, de masse m, est lâchée d'une hauteur H au dessus de la mer terrestre. Combien de temps met-elle pour toucher l'eau ?*

Résolution :

- Référentiel supposé galiléen, la pomme est un point noté $\mathcal{S}$, on néglige les frottements.
- Axe orienté vers le haut, 0 au niveau de la mer, et x sa position en fonction du temps.
- Bilan des forces appliquées : Attraction terrestre, $-mg$.
- Application de la seconde loi de Newton :
  $mx'' = \sum F_{\rightarrow \mathcal{S}} = -mg$

Exemple de la chute d'une pomme

On a alors le problème de Cauchy autonome du 2^{eme} ordre, où $t_0 = 0$

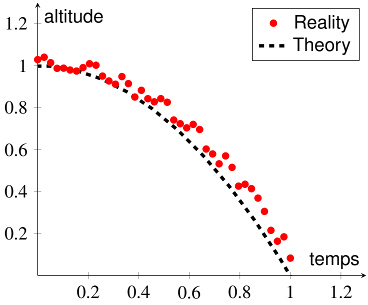
$$\begin{cases} x'' & = -g, \\ \big(x(0), x'(0)\big) & = (H, 0) \end{cases}$$

qui s'*intègre*, par double intégration,

$$x(t) = -gt^2/2 + at + b, \text{ où } (a, b) = (0, H)$$

où a et b sont les constantes du problème résolues avec les conditiions initiales/de Cauchy. Alors $x(t) = H - gt^2/2$
Attention : le problème s'arrête à t_1 lorsque la pomme rentre dans l'eau : $x(t_1) = 0 = H - gt_1^2/2$ donc $t_1 = \sqrt{2H/g}$.

Exemple de la chute d'une pomme



Que voyez-vous ? A quoi l'associez-vous ? Comment y remédieriez-vous ? Est-ce modélisable ?